

GUÍA N°2 DE MATEMÁTICAS
Factorización

1.6.5. Adición y sustracción de cubos

Los factores de una adición de cubos son:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Los factores de una sustracción de cubos son:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Factoricemos $a^3 - 8$

Observamos que a^3 es el cubo de a y que 8 es el cubo de 2 . Se trata de una sustracción de cubos, por lo tanto:

$$a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$$

2 Factoricemos $x^3 + 27$

El término x^3 es el cubo de x y 27 es el cubo de 3 . Aquí tenemos una adición de cubos y por lo tanto:

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

3 Factoricemos $27a^3 - 125b^3$

El primer término es el cubo de $3a$ y el segundo término es el cubo de $5b$, entonces escribimos:

$$27a^3 - 125b^3 = (3a - 5b)(9a^2 + 15ab + 25b^2)$$

4 Factoricemos $a^6 - b^6$

Aquí tenemos primero una diferencia de cuadrados, la cual factorizamos como una suma por su diferencia. Luego, cada uno de los factores corresponde a una suma o diferencia de cubos. Procedamos por pasos:

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

y ésta es la factorización requerida.

EJERCICIOS

Factorice las siguientes expresiones:

1. $m^6 - n^3$

9. $16x^3 - 54y^3$

17. $x^{12} - y^{12}$

2. $x^3 + p^3$

10. $216a^3 - 27b^3$

18. $m^9 - 1$

3. $a^3 - 8b^3$

11. $\frac{8}{z^3} - \frac{27}{y^3}$

19. $a^3b^{12} - 27$

4. $t^3 - 64v^3$

12. $125 - \frac{1}{8a^3}$

20. $3t^3 - 3$

5. $27x^3 + y^3$

13. $3a^3 - 81b^3$

21. $216a^3 + 8b^3$

6. $8m^3 - \frac{n^6}{8}$

14. $a^2b^3c^6 + a^2d^3$

22. $8t^3 + 64$

7. $1 - 125a^3$

15. $m^3x^3 + 1$

23. $125t^3 - \frac{1}{z^3}$

8. $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

16. $a^3b^6c^9 + 8$

24. $\frac{2}{t^3} - \frac{16}{y^3}$

25. $8a^3 + \frac{1}{b^3}$

26. $-1 + a^3$

27. $a^6 - 1$

28. $-1 - b^3$

29. $\frac{8}{t^6} - \frac{27}{t^3}$

30. $p^3 + q^9$

31. $m^{12} + 1$

32. $a^{27} + b^{27}$

33. $1 - a^9$

34. $\frac{x^3}{y^3} - 1$

35. $0,001 - \frac{a^6}{b^3}$

36. $216 - \frac{a^3}{b^3}$

37. $\frac{1}{125} + \frac{1}{z^3}$

38. $64a^3 - \frac{1}{216}$

39. $m^3 n^3 p^6 - 8a^3$

40. $\frac{1}{8z^3} + \frac{1}{27y^3}$

SOLUCIONES

1. $(m^2 - n)(m^4 + m^2 n + n^2)$

2. $(x + p)(x^2 - px + p^2)$

3. $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$

4. $(t - 4v)(t^2 + 4tv + 16v^2)$

5. $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

6. $\left(2m - \frac{n^2}{2}\right)\left(4m^2 + mn^2 + \frac{n^4}{4}\right)$

7. $(1 - 5a)(1 + 5a + 25a^2)$

8. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}\right)$

9. $2(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

10. $27(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$

11. $\left(\frac{2}{z} - \frac{3}{y}\right)\left(\frac{4}{z^2} + \frac{6}{yz} + \frac{9}{y^2}\right)$

12. $\left(5 - \frac{1}{2a}\right)\left(25 + \frac{5}{2a} + \frac{1}{4a^2}\right)$

13. $3(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)$

14. $a^2(bc^2 + d)(b^2c^4 - bc^2d + d^2)$

15. $(mx + 1)(m^2x^2 - mx + 1)$

16. $(ab^2c^3 + 2)(a^2b^4c^6 - 2ab^2c^3 + 4)$

17. $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

18. $(m - 1)(m^2 + m + 1)(m^6 + m^3 + 1)$

19. $(ab^4 - 3)(a^2 b^8 + 3ab^4 + 9)$

20. $3(t - 1)(t^2 + t + 1)$

21. $-3(3a + b)(9a^2 - 3ab + b^2)$

22. $8(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$

23. $\left(5t - \frac{1}{z}\right)\left(25t^2 + \frac{5t}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$

24. $2\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{y}\right)\left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{ty} + \frac{4}{y^2}\right)$

25. $\left(2a + \frac{1}{b}\right)\left(4a^2 - \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2}\right)$

26. $(a - 1)(a^2 + a + 1)$

27. $(a - 1)(a + 1)(a^4 + a^2 + 1)$

28. $-(1 + b)(1 - b + b^2)$

29. $\frac{1}{t^3}\left(\frac{2}{t} - 3\right)\left(\frac{4}{t^2} + \frac{6}{t} + 9\right)$

31. $(m^4 + 1)(m^8 - m^4 + 1)$

32. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^6 - a^3b^3 + b^6)(a^{18} - a^9b^9 + b^{18})$

33. $(1 - a)(1 + a + a^2)(1 + a^3 + a^6)$

34. $\left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1\right)$

35. $\left(0,1 - \frac{a^2}{b}\right)\left(0,01 + \frac{0,1a^2}{b} + \frac{a^4}{b^2}\right)$

36. $\left(6 + \frac{a}{b}\right)\left(36 - \frac{6a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right)$

37. $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5z} + \frac{1}{z^2}\right)$

38. $\left(4a - \frac{1}{6}\right)\left(16a^2 + \frac{2a}{3} + \frac{1}{36}\right)$

39. $(mnp^2 - 2a)(m^2n^2p^4 + 2a mnp^2 + 4a^2)$

40. $\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{3y}\right)\left(\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{6yz} + \frac{1}{9y^2}\right)$